بررسی پایداری معادله تابعی در فضاهای نرمدار تصادفی: مستقیم

خدیجه شفاعت

مدرس دانشگاه پیام نور گلپایگان

Khadijeh.shafaat@yahoo.com

چکیده

با توجه به اهمیت کاربردهای فضای نرمدار تصادفی در علوم و طبیـعت از جمله در فیزیک کوانتوم ، شیمی ، علوم کامپیوتر و هندسه اخیراً پایداری تعمیم یافته هایرز–اولام معادلات توابع گوناگون در فضاهای نـرمدار تصادفی و فضاهای نرمدار غیر ارشـمیدسی توسط آلسینا ، میرمصطفایی ، ساداتی ، نجاتی و... مورد مطالـعه قرار گرفته است . ابتدا در این مقاله ما برخی از تعاریف و قضایای مقدماتی که در فضای نرمدار تصادفی مورد بررسی قرار می گیرد را بـیان می کنیم . سپس پایداری تعمیم یافته اولام را برای معادله تابعی درجه سه

$$f(2x+y)+f(2x-y)-2f(x+y)-2f(x-y)-12f(x)=0$$

و معادله تابعی جمعی $f(kx+sy)-kf(x)-sf(y)=0$ با شرط $k+s, k-s\in\mathbb{R}^+$ در فضاهای نرمدار تصادفی کامل با استفاده از روش مستقیم مورد بررسی قرار می دهیم و در پایان نتایج بدست آمده را بیان می کنیم .

کلید واژه: پایداری هایرز–اولام، پایداری ، فضای نرمداری تصادفی.

۱ مقدمه

منشأ نظریه‌ی پایداری معادلات تابعی چند متغیره به بیش از نیم قرن پیش برمی گردد، زمانی است که اولام مسأله بنیادی زیر را مطرح کرد:
فرض کنید $G(.,\rho)$ گروه متریک و $\varepsilon > 0$ نگاشت $f: G \to G$ برای هر $x, y \epsilon G$ در نامساوی زیر صدق کند

$\rho\ (f(x.y), f(x).f(y)) < \varepsilon$

آیا خودریختی A ازG و ثابت $k > 0$ ، وابسته به G، وجود دارد که به ازای هر $x \in G$ داشته باشیم

$\rho\ \left(A(x), f(x)\right) \leq\ k\varepsilon$

در این مقاله پایداری تعمیم یافته‌ی اولام را برای معادله‌ی تابعی درجه سه

$$f(2x + y) + f(2x - y) - 2f(x + y) - 2f(x - y) — 12f(x) = 0$$

و معادله تابعی جمعی$f(kx + sy) - kf(x) - sf(y) = 0$ با شرط $k + s, k - s \in \mathcal{R}^+$ در فضاهای نرمدار تصادفی کامل با استفاده از روش مستقیم مورد بررسی قرار می دهیم.

تعریف ۱.۱ یک متریک تعمیم یافته روی مجموعهٔ ناتهی X تابعی مانند $d: X \times X \to [0, 1]$ است که در سه ویژگی زیر صدق کند:
الف) $d(x, y)\ =\ 0$ اگر وتنها اگر $x\ =\ y$
ب) $d(x, y) = d(y, x)$ برای هر$x, y\ \in X$
پ) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ برای هر $x, y, z \in X$
تعریف ۲.۱ نگاشت $T: [0,1] \times [0,1]\ \to\ [0,1]$ یک t- نرم پیوسته است اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱) Tجابه جایی و شرکت پذیر باشد.

۲) T پیوسته باشد.

۳) $T(a, 1) = a$ برای هر $a \in [0,1]$.

۴) $T(a, b) \leq T(c, d)$ هرگاه $a \leq c$ و $b \leq d$ برای هر $a, b, c, d \in [0,1]$.

در این مقاله Δ^+ فضای همه توابع توزیع احتمال است؛ یعنی فضای همه نگاشت هایی که $F: \mathbb{R} \cup [0,1] \to \{-\infty, +\infty\}$

به طوری که F از چپ پیوسته و روی $\mathbb{R}$ ناکاهشی باشد همچنین $F(0) = 0$ و $F(+\infty) = 1$. مجموعهD^+ شامل همه توابع $F \in \Delta^+$ به طوری که $l^- F(-\infty) = 1$ و یک زیرمجموعهΔ^+ است.$l^-(f)$حد چپ تابع f در نقطه x تعریف می‌شود؛ یعنی $l^- f(x) = lim_{t \to x^-} f(t)$. فضای Δ^+ یک مجموعه جزئاً مرتب است یعنی $F \leq G$ اگر و تنها اگر به ازای هر $t \in \mathbb{R}$، $F(t) \leq G(t)$ عضو ماکسیمال Δ^+ برابر با تابع توزیع ε_0 داده شده بوسیله زیر می باشد.

$$\mathcal{E}_0(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

تعریف ۳.۱ یک فضای نرمدار تصادفی یک سه تایی (X, μ, T) است که در آن X یک فضای برداری، T یک t- نرم پیوسته و μ نگاشتی از X است که در شرایط زیر صدق کند:

الف) $\mu_x(t) = \varepsilon_0(t)$ برای هر $t > 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

ب) $\mu_{\alpha x}(t) = \mu_x(\frac{t}{|\alpha|})$ برای هر $x \in X$ و $\alpha \neq 0$.

پ) $\mu_{x+y}(t+s) \geq T(\mu_x(t), \mu_y(s))$ برا ی هر $x, y \in X$ و $t, s \geq 0$.

تعریف۴.۱ فرض کنید(X, μ, T)یک فضای نرمدار تصادفی باشد در این صورت

۱) دنباله $\{x_n\}$در X به x همگراست هرگاه برای هر$t \geq 0$ و $\gamma > 0$ عدد مثبتی مانندN وجود داشته باشد به طوریکه اگر$n \geq N$ آنگاه $\mu_{x_n - x}(t) > 1 - \gamma$.

۲) دنباله $\{x_n\}$در X یک دنباله کوشی است هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$ و $\gamma > 0$ عدد مثبتی مانند N وجود داشته باشد به طوریکه اگر $n \geq m \geq N$ آنگاه$\mu_{x_n - x_m}(t) > 1 - \gamma$.

۳) فضای نرمدار تصادفی (X, μ, T)کامل است اگر وتنها اگر هر دنباله کوشی در X به یک نقطه در X همگرا باشد.

۴) به فضای نرمدار تصادفی کامل، فضای باناخ تصادفی نیز می‌گویند.

قضیه ۵.۱ اگر(X, μ, T)فضای نرمدار تصادفی بوده و x_nدنباله‌ای باشد بطوری که$x_n \to x$ آنگاه

$lim_{n\to\infty} \mu_{x_n}(t) = \mu_x(t)\ a.e$.

اثبات مرجع[11]

۲- پایداری معادلات تابعی درجه سه: روش مستقیم در فضاهای نرمدار تصادفی

در این قسمت پایداری تعمیم یافته اولام را برای معادله تابعی درجه سه

$$f(2x+y) + f(2x-y) - 2f(x+y) - 2f(x-y) — 12f(x) = 0$$

در فضاهای نرمدار تصادفی کامل با استفاده از روش مستقیم مورد بررسی قرار می دهیم.

قضیه ۱.۲ فرض کنید X یک فضای خطی باشد و (Z, μ, T) یک فضای نرمدار تصادفی بوده و$\varphi: X \times X \to Z$ تابعی باشد که برای $0 < \alpha < 8$در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\mu_{\varphi(2x,0)}(t) \geq \mu_{\alpha\varphi(x,0)}(t) \qquad \forall x \in X, t > 0. \qquad (1.2)$$

برای هر $x, y \in X$ و $t > 0$ داریم $f(0) = 0$ و $lim_{n\to\infty} \mu_{\varphi(2^n x, 2^n y)}(8^n t) = 1$ فرض کنید (Y, μ, T) یک فضای نرمدار تصادفی کامل باشد. اگر $f: X \to Y$ نگاشتی باشد که

$$\mu_{f(2x+y)+f(2x-y)-2f(x+y)-2f(x-y)-12f(x)}(t) \geq \mu_{\varphi(x,y)}(t), \forall x \in X, t > 0 \qquad (2.2)$$

آنگاه نگاشت یکتای درجه سه $C: X \to Y$ وجود دارد به طوری که

$$\mu_{f(x)-C(x)}(t) \geq \mu_{\varphi(x,0)}(2(8-\alpha)t) \qquad (3.2)$$

اثبات. در (2.2) قرار می‌دهیم $y = 0$ لذا

$$\mu_{(f(2x)/8)-f(x)}(t) \geq \mu_{\varphi(x,0)}(16t) \qquad \forall x \in X \qquad (4.2)$$

در(4.2) به جای x قرار می‌دهیم $2^n x$ و با استفاده از (1.2) نتیجه می‌شود که

$$\mu_{(f(2^{n+1}x/8^{n+1})-(f(2^n x)/8^n)}(t) \geq \mu_{\varphi(2^n x,0)}(16 \times 8^n)t) \;\; \geq \mu_{\varphi(x,0)}\left(\frac{(16 \times 8^n t}{\alpha^n}\right) \qquad (5.2)$$

می‌دانیم که $(f(2^n x/8^n) - f(x) = \sum_{k=0}^{n-1}\big((f(2^{k+1}x/8^{k+1})\big) - (f(2^k x/8^k))$لذا بنابه(5.2) داریم که

$$\mu_{(2^n x/8^n)-f(x)}\left(t\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k}{16 \times 8^k}\right) \geq T_{k=0}^{n-1}\left(\mu_{\varphi(x,0)}(t)\right) = \mu_{\varphi(x,0)}(t) \qquad (6.2)$$

یعنی

$$\mu_{f(2^n x/8^n - f(x)}(t) \geq \mu_{\varphi(x,0)}\left(\frac{t}{\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha^k/(16 \times 8^k))}\right) \qquad (7.2)$$

در (7.2) به جای x قرار می‌دهیم $2^m x$، نتیجه می‌شود که

$$\mu_{f(2^{n+m}x)/8^{n+m} - f(2^m x)/8^m}(t) \geq \mu_{\varphi(x,0)}\left(\frac{t}{\sum_{k=m}^{n+m}(\alpha^k/(16 \times 8^k}\right) \qquad (8.2)$$

وقتی n, m به بینهایت میل می‌کنند$\mu_{\varphi(x,0)}\big(t/\sum_{k=m}^{n+m}(\alpha^k/16 \times 8^k\big)$ برابر یک می‌شود پس دنباله$\left\{\frac{f(2^n x}{8^n}\right\}$ یک دنباله کوشی در (Y, μ, T) است چون (Y, μ, T) یک فضای نرمدار تصادفی کامل است بنا به محک همگرایی کوشی دنباله $\left\{\frac{f(2^n x}{8^n}\right\}$ به نقطه $C(x) \in Y$ همگرا است. در (8.2) ، x را ثابت و $m = 0$در نظر می‌گیریم فلذا داریم:

$$\mu_{(f(2^n x)/8^n)-f(x)}(t) \geq \mu_{\varphi(x,0)}\left(\frac{t}{\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha^k/(16 \times 8^k))}\right) \qquad (9.2)$$

و همچنین برای هر $\delta > 0$ داریم

$$\mu_{C(x)-f(x)}(t+\delta) \geq T(\mu_{C(x)-f(2^n x/8^n)}(\delta), \mu_{f(2^n x/8^n)-f(x)}(t)$$

$$\geq T\left(\mu_{C(x)-f(2^n x)/8^n}(\delta), \mu_{\varphi(x,0)}\frac{t}{\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha^k/(16 \times 8^k))}\right) \qquad (10.2)$$

اگر $n \to \infty$ آنگاه (10.2) میل می کند به رابطه زیر

$$\mu_{C(x)-f(x)}(t+\delta) \geq \mu_{\varphi(x,0)}\big(2t(8-\alpha)\big) \qquad (11.2)$$

چون δ دلخواه بود در (11.2) پس

$$\mu_{C(x)-f(x)}(t) \geq \mu_{\varphi(x,0)}\big(2t(8-\alpha)\big) \qquad (12.2)$$

در (2.2) به جای x وy به ترتیب $2^n x$و $2^n y$را قرار می‌دهیم، پس خواهیم داشت

$$\mu_{f(2^n(2x+y))/8^n+f(2^n(2x-y))/8^n-2f(2^n(2x+y))/8^n-2f(2^n(x-y)/8^n-12f(2^n(x)/8^n}(t)$$
$$\geq \mu_{\varphi(2^n x,\, 2^n y)}(8^n t) \quad (1.13)$$

برای هر $x, y \in X$ و $t > 0$ چون $lim_{n\to\infty} \mu_{\varphi(2^n x, 2^n y)}(8^n t) = 1$ نتیجه می‌گیریم که C در

$f(2x+y) + f(2x-y) = 2f(x+y) + 2f(x-y) + 12f(x)$ صدق می‌کند. برای اثبات منحصر به فرد بودن نگاشت درجه سه C فرض می‌کنیم نگاشت درجه سوم دیگری مانند $D: X \to Y$ موجود باشد که در (3.2)صدق می‌کند. $x \in X$ ثابت می‌گیریم. بدیهی است که برای هر $C(2^n x) = 8^n C(x), n \in N$ و $D(2^n x) = 8^n D(x)$. از (3.2) نتیجه می‌گیریم که

$$\mu_{C(x)-D(x)}(t) = \lim_{n\to\infty} \mu_{(C(2^n x)/8^n)-(D(2^n x)/8^n)}(t)$$
$$\mu_{C(2^n x)/8^n - D(2^n x)/8^n}(t) \geq T\{\mu_{C(2^n x)/8^n - f(2^n x)/8^n}\left(\frac{t}{2}\right), \mu_{D(2^n x)/8^n - f(2^n x)/8^n}(\frac{t}{2})$$
$$\geq \mu_{\varphi(2^n x,0)}(8^n(8-\alpha)t) \geq \mu_{\varphi(x,0)}\left(\frac{8^n(8-\alpha)}{\alpha^n}\right)$$

چون $lim_{n\to\infty}(8^n(8-\alpha)t/\alpha^n = \infty$ نتیجه می‌گیریم که $lim_{n\to\infty} \mu_{\varphi(x,0)}(8^n(8-\alpha)t/\alpha^n = 1$

بنابراین برای هر $t > 0$، $\mu_{C(x)-D(x)}(t) = 1$ و در نتیجه $C(x) = D(x)$. اثبات کامل شد. ■

نتیجه ۲.۲ فرض کنید X یک فضای خطی باشد و (Z, μ, T)یک فضای نرمدار تصادفی بوده و (Y, μ, T) یک فضای نرمدار تصادفی کامل باشد و فرض کنیدp, q اعداد حقیقی نامنفی و $z_0 \in Z$. اگر $f: X \to Y$ نگاشتی باشد که

$$\mu_{f(2x+y)+f(2x-y)-2f(x+y)-2f(x-y)-12f(x)}(t) \geq \mu_{(\|x\|^p+\|y\|^q)z_0}(t) \quad \forall x \in X, t > 0 \quad (14.2)$$

$f(0) = 0$ و$p, q < 3$ آنگاه نگاشت یکتای درجه سه $C: X \to Y$ وجود دارد به طوری که

$$\mu_{f(x)-C(x)}(t) \geq \mu_{\|x\|^p}(2(8-2^p)t) \quad (15.2)$$

اثبات. با قرار دادن $\Phi(x,y) = (\|x\|^p + \|y\|^q)z_0$ و $\alpha = 2^p$ در قضیه (۱.۲) نامساوی(15.2)بدست می آید. ■

نتیجه۳.۲ فرض کنید X یک فضای خطی باشد و (Z, μ, T)یک فضای نرمدار تصادفی بوده و$\varphi: X \times X \to Z$ تابعی باشد که برای $0 < \alpha < 8$ در نامساوی زیر صدق کند:

$$\mu_{\varphi(\frac{x}{2},0)}(t) \geq \mu_{\alpha\varphi(x,0)}(t) \qquad \forall x \in X, t > 0. \quad (16.2)$$

برای هر $x, y \in X$ و $t > 0$ داریم $f(0) = 0$ و $lim_{n\to\infty} \mu_{\varphi(\frac{x}{2^n}, \frac{y}{2^n})}(8^n t) = 1$ فرض کنید (Y, μ, T) یک فضای نرمدار تصادفی کامل باشد. اگر $f: X \to Y$ نگاشتی باشد که

$$\mu_{f(2x+y)+f(2x-y)-2f(x+y)-2f(x-y)-12f(x)}(t) \geq \mu_{\varphi(x,y)}(t), \forall x \in X, t > 0 \quad (17.2)$$

آنگاه نگاشت یکتای درجه سه $C: X \to X$ وجود دارد که

$$\mu_{f(x)-C(x)}(t) \geq \mu_{\varphi(x,0)}\left(\frac{8-\alpha}{4}t\right). \quad (18.2)$$

اثبات. مشابه برهان قضیه (۱.۲). ■

۳ پایداری معادلات تابعی جمعی: روش مستقیم در فضاهای نرمدار تصادفی

در این قسمت پایداری تعمیم یافته اولام را برای معادله تابعی جمعی $f(kx+sy)-kf(x)-sf(y)=0$ باشرط $k+s, k-s \in \mathbb{R}^{+}$ در فضاهای نرمدار تصادفی کامل با استفاده از روش مستقیم مورد بررسی قرار می دهیم.

قضیه ۱.۳ فرض کنید X یک فضای خطی باشد و (Z,μ,T) یک فضای نرمدار تصادفی بوده و $\varphi: X\times X \to Z$ تابعی باشد که برای $0<\alpha<k+s$ در نامساوی زیر صدق می‌کند:

$$\mu_{\varphi((k+s)x,(k+s)y)}(t) \geq \mu_{\alpha\varphi(x,y)}(t) \qquad \forall x\in X, t>0. \tag{1.3}$$

برای هر $x,y \in X$ و $t>0$ داریم $f(0)=0$ و $\lim_{n\to\infty} \mu_{\varphi(\frac{x}{(k+s)^n},\frac{y}{(k+s)^n})}((k+s)^n t)=1$ فرض کنید (Y,μ,T) یک فضای نرمدار تصادفی کامل باشد. اگر $f: X\to Y$ نگاشتی باشد که

$$\mu_{f(kx+sy)-kf(x)-sf(y)}(t) \geq \mu_{\varphi(x,y)}(t), \forall x\in X, t>0. \tag{2.3}$$

آنگاه یک نگاشت جمعی یکتای $g: X\to X$ وجود دارد که

$$\mu_{f(x)-g(x)}(t) \geq \mu_{\varphi(x,x)}((k+s-\alpha)t). \tag{3.3}$$

بعلاوه

$$g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{f((k+s)^n x)}{(k+s)^n}$$

اثبات. در(2.3) قرار می‌دهیم $y=x$ لذا

$$\mu_{(f((k+s)x)/(k+s))-f(x)}(t) \geq \mu_{\varphi(x,x)}((k+s)t), \qquad \forall x\in X \tag{4.3}$$

در(4.3) به جای x قرار می دهیم $(k+s)^n x$ و با استفاده از (1.3) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}\mu_{(f((k+s)^{n+1}x)/(k+s)^{n+1})-(f((k+s)^n x)/(k+s)^n)}(t) &\geq \mu_{\varphi((k+s)^n x,x)}\big((k+s)\times(k+s)^n\big)t)\\ &\geq \mu_{\varphi(x,x)}\left(\frac{((k+s)\times(k+s)^n t}{\alpha^n}\right)\end{aligned} \tag{5.3}$$

می‌دانیم که

$$(f((k+s)^n x)/(k+s)^n)-f(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\big((f((k+s)^{k+1}x/(k+s)^{k+1})\big)-\big(f(2^k x/8^k)\big)$$

لذا بنابه(5.3) داریم که

$$\begin{aligned}\mu_{((k+s)^n x/(k+s)^n)-f(x)}\left(t\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\alpha^k}{(k+s)^{k+1}}\right) &\geq \mathrm{T}_{k=0}^{n-1}\left(\mu_{\varphi(x,x)}(t)\right)\\ &= \mu_{\varphi(x,x)}(t)\end{aligned} \tag{6.3}$$

یعنی

$$\mu_{f((k+s)^n x/(k+s)^n-f(x)}(t) \geq \mu_{\varphi(x,x)}\left(\frac{t}{\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha^k/(k+s)^{k+1})}\right) \tag{7.3}$$

در (7.3) به جای x قرار می‌دهیم $(k+s)^m x$ ونتیجه می‌شود که

$$\mu_{f((k+s)^{n+m}x)/(k+s)^{n+m}-f((k+s)^m x)/(k+s)^m}(t) \geq \mu_{\varphi(x,x)}\left(\frac{t}{\sum_{k=m}^{n+m}(\alpha^k/(k+s)^{k+1})}\right) \qquad (8.3)$$

وقتی n,m به بینهایت میل می‌کنند$\mu_{\varphi(x,x)}\left(t/\sum_{k=m}^{n+m}(\alpha^k/(k+s)^k)\right)$ برابر یک می‌شود پس دنباله$\left\{\frac{f((k+s)^n x}{(k+s)^n}\right\}$ یک دنباله کوشی در (Y,μ,T) است چون (Y,μ,T) یک فضای نرمدار تصادفی کامل است بنا به محک همگرایی کوشی دنباله $\left\{\frac{f((k+s)^n x}{(k+s)^n}\right\}$ به نقطه $C(x) \in Y$ همگرا است. در (8.3)، x را ثابت و $m=0$ در نظر می‌گیریم فلذا داریم :

$$\mu_{(f((k+s)^n x)/(k+s)^n)-f(x)}(t) \geq \mu_{\varphi(x,x)}\left(\frac{t}{\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha^k/(k+s)^{k+1})}\right) \qquad (9.3)$$

و همچنین برای هر $\delta > 0$ داریم

$$\mu_{C(x)-f(x)}(t+\delta) \geq T(\mu_{C(x)-f((k+s)^n x/(k+s)^n)}(\delta), \mu_{f((k+s)^n x/(k+s)^n)-f(x)}(t)$$

$$\geq T\left(\mu_{C(x)-f((k+s)^n x)/(k+s)^n}(\delta), \mu_{\varphi(x,x)}\frac{t}{\sum_{k=0}^{n-1}(\alpha^k/(k+s)^{k+1})}\right) \qquad (10.3)$$

اگر $n \to \infty$ آنگاه (10.3) میل می کند به رابطه زیر

$$\mu_{C(x)-f(x)}(t+\delta) \geq \mu_{\varphi(x,x)}\big((k+s-\alpha)t\big) \qquad (11.3)$$

چون δ دلخواه بود در (11.3) پس

$$\mu_{C(x)-f(x)}(t) \geq \mu_{\varphi(x,x)}\big((k+s-\alpha)t\big) \qquad (12.3)$$

در (۲.۳) به جای xوy به ترتیب $(k+s)^n x$و $(k+s)^n y$را قرار می‌دهیم، پس خواهیم داشت

$$\mu_{f\left((k+s)^n(kx+sy)\right)/(k+s)^n-kf\left((k+s)^n(kx)\right)/(k+s)^n-sf\left((k+s)^n(sy)\right)/(k+s)^n}(t)$$
$$\geq \mu_{\varphi((k+s)^n x,\,(k+s)^n y)}\big((k+s)^n t\big) \qquad (13.3)$$

برای هر $x,y \in X$ و $t > 0$ چون $\lim_{n\to\infty} \mu_{\varphi((k+s)^n x,(k+s)^n y)}\left((k+s)^n t\right) = 1$ نتیجه می‌گیریم که C در $f(kx+sy)-kf(x)-sf(y)=0$صدق می‌کند. اثبات منحصربه فرد بودن مشابه قضیه (۱.۲) . ■

نتیجه ۲.۳ فرض کنید X یک فضای خطی باشد و (Z,μ,T) یک فضای نرمدار تصادفی بوده و(Y,μ,T) یک فضای نرمدار تصادفی کامل باشد و فرض کنیدp,q اعداد حقیقی نامنفی و $z_0 \in Z$. اگر $f: X \to Y$ نگاشتی باشد که

$$\mu_{f(kx+sy)-kf(x)-sf(y)}(t) \geq \mu_{(\|x\|^p+\|y\|^p)z_0}(t), \forall x \in X, t > 0 \qquad (14.3)$$

$f(0)=0$ و$\mathrm{p} > 1$ آنگاه نگاشت یکتای جمعی$C: X \to Y$ وجود دارد به طوری که

$$\mu_{f(x)-C(x)}(t) \geq \mu_{\|x\|^p z_0}\left(\frac{k+s-2^p}{2}t\right) \qquad (15.3)$$

اثبات. در قضیه (۱.۳) قرار می دهیم $\Phi(x,y) = (\|x\|^p+\|y\|^p)z_0$ و $\alpha = 2^p$ نتیجه اثبات می شود. ■

نتیجه۳.۳ فرض کنید X یک فضای خطی باشد و (Z,μ,T) یک فضای نرمدار تصادفی بوده و(Y,μ,T) یک فضای نرمدار تصادفی کامل باشد و فرض کنید $z_0 \in Z$. اگر $f: X \to Y$ نگاشتی باشد که

$$\mu_{f(kx+sy)-kf(x)-sf(y)}(t) \geq \mu_{\varepsilon z_0}(t), \forall x \in X, t > 0. \tag{16.3}$$

$f(0) = 0$آن‌گاه نگاشت یکتای درجه سه $C: X \to Y$ وجود دارد به طوری که

$$\mu_{f(x)-C(x)}(t) \geq \mu_{\varepsilon z_0}((k+s-1)t) \tag{17.3}$$

اثبات. با قرار دادن $\Phi(x,y) = \varepsilon z_0$ و $\alpha = 1$ در قضیه (۱.۳) نامساوی(17.3)بدست می آید.■

مراجع

[1] L. M. Arriola and W. A. Beyer, Stability of the Cauchy functional equation over p-adic fields, Real Anal. Exchange 31 (2005/06), no. 1, 125-132.

[2] H.AzadiKenary, Kh. Shafaat, M.Shafei, G. Takbiri, Hyers-Ulam-Rassias stability of the Apollonius type quadratic mapping in RN-Spaces, J. Nonlinear Sci. Appl.4(20011).no.1, 110-119

[3] C. Alsina**,** On the stability of a functional equation arising in probabilistic normed spaces, in:General Inequalities, vol. 5, Oberwolfach, 1986, Birkhäuser, Basel, 1987,pp.263-271.

[4] T.Aoki, On the stability of the linear transformation in Banach spaces, J. Math.Soc. Japan 2(1950)

64-66.

[5] Y. S. Cho and H. M. Kim, Stability of functional inequalities with Cauchy-Jensen additive mappings, Abstr. Appl. Anal.(2007), Art. ID 89180, 13pp.

[6] S. Czerwik, Functional Equations and Inequalities in Several Variables, World Scientific, River Edge, NJ, 2002.

[7] D. H. Hyers, On the stability of the linear functional equation, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.27(1941),222-224.

[8] D.Mihet, V. Radu, On the stability of the additive Cauchy functional equation in random normed spaces. J. Math. Anal. Appl. 343(2008) 567-572

[9] A. K. Mirmostafaee, M. S. Moslehian, Fuzzy versions of Hyers-Ulam-Rassias theorem, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008) 720-729.

[10] R. Saadati and M. Vaezpour and Y. J. Cho, A note to paper “On the stability of cubic mapping and quadratic mappings in random normed spaces, J. of Inequalities and Applications, Vol. 2009, Article ID 214530.

[11] B. Schweizer and A. Skar, Probabilistic Metric Spaces, North-Holland Series in Probability and Applied Mathematics, North-Holland, New York, NY,USA,1983.

[12] S.M. Ulam, Problems in Moderns Mathematics, Science Editions, John Wiley and Sons, 1941.